

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală

CLASA A IX-A

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.
- Timp efectiv de lucru: 3 ore

1. Să se demonstreze că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ sunt adevărate inegalitățile:

a) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$

b) $\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\{x\} - \{2025x\} = x$$

3. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + \frac{3}{4}$, $(\forall) n \geq 1$ și $a_1 = \frac{2025}{2026}$

a) Determinați formula termenului general $a_n, n \geq 1$.

b) Demonstrați că $(a_1 - \frac{1}{2})(a_2 - \frac{1}{2}) \dots (a_n - \frac{1}{2}) \leq \left(\frac{506}{1013}\right)^n, (\forall) n \geq 1$

4. Dacă $[AB]$ și $[CD]$ sunt două coarde perpendiculare ale cercului $C(O, R)$ și $AB \cap CD = \{P\}$, arătați că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$.